

Karim Turki

Recherche élégante en maths



Avant-propos

Cet ouvrage propose aux élèves de classes terminales (spécialité math) *qui veulent aller très loin et apprendre la recherche assez tôt* et aux étudiants *matheux* ainsi que les enseignants des sciences mathématiques des problèmes généralement difficiles et très originaux et élégants, ils ponctuent des résultats très célèbres rarement ou jamais vu en terminale secondaire, plutôt, ils font l'objectif du programme du premier cycle supérieur, l'atout de l'ouvrage est de satisfaire la curiosité des matheux et les élites en les préparant pour développer leur techniques de recherche et leurs offrant une bonne culture mathématique, des astuces très difficiles et surtout des techniques de résolution de problèmes mathématiques non courante pour les classes de terminal.

L'ouvrage présente quelques résultats de recherche dans la vie de l'auteur à partir du secondaire, étude supérieure et sa vie en tant qu'enseignant de mathématiques.

Les résultats de l'ouvrage sont soit des nouveaux résultats, soit des résultats célèbres reconstruit avec des moyens élémentaires.

Les acquis nécessaires pour résoudre les problèmes de l'ouvrage sont les acquis du bac ou légèrement plus.

Les compléments de cours sont des résultats très classiques (qui figure dans le programme de terminal tunisien spécialité math et ne sont pas des objectifs dans le programme français) et dont la connaissance est utile et indispensable pour résoudre et bien comprendre les problèmes proposés.

trois chapitres sont présentés dans cet ouvrage :

Analyse

Arithmétique

Complexe

« Présentation de l'ouvrage »

A/ Arithmétique :

Problème 1 :

Recherche de deux entiers $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $a^2 + b^2 = m$ avec m un entier très grand.

Problème 2 :

p premier $\equiv 1[4]$ on construit explicitement un entier x vérifiant $x^2 \equiv -1[p]$

Problème 3 : Soit $p = 2s + 1$ et $n \in \mathbb{N}$ et $U_n = \sum_{k=1}^{p-1} k^n$

Si $1 \leq n \leq p-2$ et p premier alors $U_n \equiv 0[p]$

Si $1 \leq n \leq s$ et p est premier alors $U_{2n+1} \equiv 0[p^2]$

Problème 4 :

Si n premier et $n \geq 5$ alors n^3 divise $C_{2n}^n - 2$

La démonstration est très originale et assez courte présentant sept degrés de difficultés (sept étapes) faisant intervenir simplement de l'arithmétique.

Problème 5 :

Si n premier et $n \geq 5$ alors n^2 divise $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k}$

La démonstration de ce résultat s'inspire de celle de la démonstration précédente.

Problème 6 : Nouvelle démonstration du résultat :

Si p premier $\equiv 1[4]$ alors $\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p = a^2 + b^2$. Le nouveau dans cette démonstration, c'est qu'on n'utilise pas la théorie des groupes mais simplement de l'arithmétique en se limitant ainsi au programme du terminal S spécialité math.

Problème 7 : Nouvelle démonstration du théorème des sommes des carrés :

$m \in \mathbb{N}^*$ est somme de deux carrés $\Leftrightarrow$ dans la décomposition canonique en produit de facteur premier, tout facteur premier $\equiv 3[4]$ est d'exposant paire.

Le nouveau ici est qu'on exclue dans la démonstration, la théorie de groupe en la remplaçant par une récurrence très difficile et originale sur des nombres premiers. On se limite également à l'arithmétique.

Problème 8 : Résultat :

Si p premier $\equiv 1[3]$ alors $\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$p = a^2 - ab + b^2$. La démonstration se limite également au programme de terminal S spécialité math : seulement de l'arithmétique sans théorie de groupe.

Problème 9 : Résultat :

$m \in \mathbb{N}^*$, $\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $m = a^2 + b^2 - ab \Leftrightarrow$ dans la décomposition canonique en produit de facteurs premiers, tout facteur premier $\equiv 2[3]$ est d'exposant paire.

La démonstration est aussi nouvelle faisant exclure la théorie des groupes et se limitant à l'arithmétique, et une nouvelle fois une récurrence sur les nombres premiers.

Problème 10 : résultat :

l'ensemble des nombres premiers $\equiv 1[12]$ est infini.

La démonstration est conforme au programme de terminal S spécialité math utilisant simplement de l'arithmétique. Démonstration nouvelle et originale.

Problème 11 : l'ensemble des nombres premiers $\equiv 1[4]$ est infini

Problème 12 : l'ensemble des nombres premiers $\equiv 1[3]$ est infini

Problème 13 :

Le but du problème est de prouver que $\Delta(u_m, u_n) = u_{\Delta(m,n)}$ avec (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

Problème 14 :

Le problème démontre le résultat suivant :

Si $(x, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3, d = \Delta(p, q)$ et $d = mp - nq$ alors $x^d - 1 = \Delta(x^{mp} - 1, x^{nq} - 1)$

Problème 15 :

Le problème démontre le résultat suivant :

Calcul de $\Delta(pa + qb, ra + sb)$ en fonction de $\Delta(a, b)$ avec $ps - qr = 1$

Problème 16 :

Le problème démontre le résultat suivant : $\Delta(u_m, u_n) = u_{\Delta(m,n)}$ avec (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

Problème 17 :

Le problème étudie l'application indicateur d'Euler et quelques applications, par exemple : Si $\Delta(a, n) = 1$ alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$; et si $d_1, d_2, \dots, d_s$ sont les diviseurs de n alors $n = \sum_{i=1}^s \varphi(d_i)$ sans utiliser la théorie des groupes.

Problème 18 :

Ce problème étudie les polynômes cyclomatiques, démonstration du résultat suivant : $x^n - 1 = \prod_{i=1}^s \phi_{d_i}(x)$ avec $d_1, d_2, \dots, d_s$ sont les diviseurs de n en se limitant à l'arithmétique sans utiliser la théorie des groupes.

B/ Analyse :**Problème 1 :**

Calcul de série de Riemann d'exposant 2 $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$ en s'inspirant des série de Fourier bien travailler pour être compatible avec le niveau de terminale secondaire S.

Problème 2 :

Méthode de Holme pour calculer la série de Riemann d'exposant 2 et son application pour calculer : $\int \frac{x^{2p+1} \text{Log } x}{x^2 - 1} dx$ avec $p \in \mathbb{N}$ adapté au niveau terminal secondaire (astuces nouvelles très intéressantes)

Problème 3 :

Méthode de Papadimitrou pour calculer la série de Riemann d'exposant 2. Problème long plein de difficultés et astuces originales.

Problème 4 :

Intégrales de Wallis et ses application : Formule de Wallis, formule de Stirling et intégrale de Gauss $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt \right)$, le nouveau dans ce problème est l'intégrale de Gauss à l'aide de Wallis généralement étudié en 1^{er} cycle scientifique supérieur (math sup.)

Problème 5 : Le but de ce problème est de démontrer que :

$$\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2} + k\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \right)$$

Problème 6 :

Calcul de l'intégrale de Gauss en utilisant la fonction intermédiaire

$t \rightarrow \frac{e^{\frac{-x^2}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}$ définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$. Le problème présente des difficultés intéressantes.

Problème 7 :

Ce problème permet de calculer l'intégrale de Poisson

$I(x) = \int_0^\pi \text{Log}(x^2 - 2x \cos t + 1) dt$ en démontrant que $I(x^2) = 2I(x)$ qui est un sujet d'étude du cycle préparatoire aux grandes écoles (math sup. et math spé.). Il est présenté conformément au programme de terminal S.

Problème 8 :

Ce problème permet de calculer l'intégrale de Poisson en utilisant la somme de Riemann.

Problème 9 :

Le but du problème est d'expliciter et développer en série entière la fonction

$$I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos nt}{1 - x \cos t} dt \quad \text{pour } x \in]-1, 1[. \text{ Ce problème a été le sujet d'un}$$

concours d'admission à l'école polytechnique, 86. Ce problème est plein de trucs originaux conformes au programmes de terminal S.

Problème 10 :

Ce problème permet de calculer la série

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k-1}}{k^2 - \lambda^2} = -\frac{1}{\lambda} + \frac{\pi}{\sin \lambda \pi} \quad (\lambda \in \mathbb{R} /) \text{ par l'intermédiaire de la suite}$$

$U_n = \int_0^\pi \cos \lambda x \cdot \cos nx \, dx$. Ce problème était le sujet du concours des mines 1984.

conforme au programme de terminal S.

Problème 11 :

Ce problème permet une nouvelle construction de la fonction exponentielle.

C'est la solution du problème :

H l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$f \in H \Leftrightarrow$$

i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 non identiquement nulle.

$$\text{ii) } f(1) = e \left(\text{avec } e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right)$$

$$\text{On démontrera que } h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \text{ est l'unique élément de H.}$$

Ce problème est une nouvelle vue de la construction de la fonction exponentielle.

Problème 12 :

Ce problème permet de démontrer la formule du binôme

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

sans utiliser le théorème de récurrence ni la théorie de dérivation. Le nouveau dans ce problème est qu'il suppose inconnue la suite C_n^k dans le développement de $(a + b)^n$.

Problème 13 :

Le but du problème est de prouver que e^2 est irrationnel en utilisant de l'analyse et de l'arithmétique conformément au programme de terminal S spécialité math.

Problème 14 :

Le but du problème est de prouver que e est non algébrique d'ordre 2 c'est-à-dire qu'il n'existe pas trois entiers a , b et c non tous nuls vérifiant : $ae^2 + be + c = 0$

Problème 15 : Le but du problème est de justifier l'irrationalité de π^2 et π

Problème 16 :

Le problème étudie l'aire d'un cercle par deux méthodes analytiques et géométrique et démontre la formule de François Viète à savoir :

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \dots$$

Problème 17 :

Le problème détermine la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$$

Problème 18 :

Le problème définit la fonction eurlienne $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ avec quelques

Problème 19 :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

propriétés.

titre1:C/ Complexe :

I/ Rappels de cours :

i) Théorème de Ptolémée.

ii) La somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égal à la somme des carrés des ses quatre côtés.

iii) Si A, B, C, D et E cinq points du plan et $r > 0$ alors il existe un point M du cercle $\mathcal{C}_{(A,r)}$ tel que $MA \cdot MB \cdot MC \cdot MD \cdot ME \geq r^5$.

iv) Recherche des application définies sur $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) + 2f\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}z\right) - f\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}z\right) = z$$

v) C'est un problème de complexe donnant l'expression de

$$\cos \frac{2\pi}{17} = \frac{\left[-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right]}{16}$$

Chapitre 1

Analyse

Problèmes résolus :

Problème 1 : (série de Riemann d'exposant 2 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^x \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

A / Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\text{et } V_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$$

1) Trouver deux réels a et b tel que $\forall n \in \mathbb{N} ; n \geq 2 \quad \frac{1}{n(n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1}$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; V_n = 2 - \frac{1}{n}$

2) Montrer que U est croissante et que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; U_n \leq V_n$ et que (U_n) converge.

B/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les fonctions C_n et S_n sur $[0, \pi]$ par :

$$\forall t \in [0, \pi] ; C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos kt \quad \text{et} \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^n \sin kt$$

1) Montrer que $\forall t \in [0, \pi] ; C_n(t) + iS_n(t) = \frac{e^{it} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}$

En déduire que $\forall t \in [0, \pi] ; C_n(t) = \frac{\sin \frac{nt}{2} \cdot \cos \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}$ et $C_n(0) = n$.

Cette fonction C_n ainsi définie est – elle continue sur $[0, \pi]$?

2) Soit $g_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \rightarrow g_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}}$ si $t \in]0, \pi]$ et $g_n(0) = 2n+1$

a) Montrer que g_n est continue sur $[0, \pi]$

b) Montrer que $\forall t \in [0, \pi]; g_n(t) = 1 + 2C_n(t)$

3) Montrer que $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}$ et en déduire que $U_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) C_n(t) \, dt$

4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*; U_n + I_n = \frac{\pi^2}{6}$ avec $I_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) g_n(t) \, dt$

C/ Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$; $t \rightarrow f(t) = \frac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{\sin \frac{t}{2}}$ si $t \in]0, \pi]$ et $f(0) = 2$

1) Montrer que f est continue sur $[0, \pi]$, en déduire que $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in [0, \pi]; 0 \leq f(t) \leq M$

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, \pi]$ et calculer $f'(t)$ pour $t \in]0, \pi]$

b) Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{\pi}$ (indication :

montrer que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; 0 \leq t - 2 \sin \frac{t}{2} \leq \frac{t^3}{24}$).

3) a) Montrer que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; 0 \leq \sin \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \leq \frac{t^3}{8}$

b) En déduire que f' est continue sur $[0, \pi]$

c) En déduire $\exists M' \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [0, \pi]; |f'(t)| \leq M'$

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; I_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt$

b) En utilisant une intégration par partie montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Solution (P1) :

A/

$$1) \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$\begin{aligned} V_n &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

$$2) n \in \mathbb{N}^*; U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0 \Rightarrow U \text{ est croissante}$$

$$k^2 \geq k(k-1) \quad \forall k \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \quad \forall k \geq 2 \Rightarrow U_n \leq V_n \leq 2$$

U est croissante majorée donc U est convergente.

$$\mathbf{B/} \quad n \in \mathbb{N}^*; C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos kt \text{ et } S_n(t) = \sum_{k=1}^n \sin kt$$

$$1) \quad t \in]0, \pi] \quad C_n(t) + iS_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos dt + i \sin dt = \sum_{k=1}^n e^{it} \quad (t \in]0, \pi] \text{ donc } e^{it} \neq 1)$$

$$\begin{aligned} &= e^{it} \frac{1 - (e^{it})^n}{1 - e^{it}} = \frac{e^{it} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{\frac{i(n+2)t}{2}} \cdot e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{i(n+2)t}{2}} \cdot e^{-\frac{it}{2}}}{e^{\frac{it}{2}} \cdot e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}} \cdot e^{-\frac{it}{2}}} \\ &= \frac{e^{\frac{i(n+2)t}{2}}}{e^{\frac{it}{2}}} \times \frac{-2i \sin \frac{nt}{2}}{-2i \sin \frac{t}{2}} \\ &= e^{\frac{i(n+1)t}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{n}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \left(\cos \left(\frac{n+1}{2} t \right) + i \sin \left(\frac{n+1}{2} t \right) \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_n(t) = \frac{\sin \frac{nt}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \text{ et } S_n(t) = \frac{\sin \frac{nt}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* ; \forall t \in]0, \pi]$$

$$C_n(0) = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} C_n(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin \frac{nt}{2} \cos \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin \frac{nt}{2}}{t} \cdot \cos \frac{(n+1)t}{2}}{\frac{\sin \frac{t}{2}}{t}} = \frac{\frac{n}{2} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = n = C_n(0)$$

$\Rightarrow C_n$ est continue sur $[0, \pi]$

2) $g_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto g_n(t) = \frac{\sin \frac{(2n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \text{ si } t \neq 0 \text{ et } g_n(0) = 2n+1$$

$$\text{a) } \lim_{t \rightarrow 0^+} g_n(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin \frac{(2n+1)t}{2}}{t} \cdot \frac{(2n+1)}{1}}{\frac{\sin \frac{t}{2}}{t}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2n+1 = g_n(0).$$

$\Rightarrow g_n$ est continue sur $[0, \pi]$

$$\text{b) } t \in [0, \pi], \quad 1 + 2C_n(t) = \frac{\sin \frac{t}{2} + 2 \sin \frac{nt}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} + \sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \\ = g_n(t) \text{ si } t \in]0, \pi]$$

Si $t=0$, $g_n(0) = 1 + 2C_n(0) = 2n+1 \Rightarrow \forall t \in [0, \pi]; g_n(t) = 1 + 2C_n(t)$

$$\text{3) Soit } n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos nt \, dt = \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cdot \frac{\sin nt}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \frac{\sin nt}{n} \, dt \\ = \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \frac{\cos nt}{n^2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos nt}{n^2} \, dt \\ = \frac{1}{n^2} - \left[\frac{\sin nt}{n^3} \right]_0^\pi \\ = \frac{1}{n^2}$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) C_n(t) dt = \int_0^\pi \sum_{k=1}^n \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos kt dt = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos kt dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = U_n$$

$$4) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) g_n(t) dt$$

$$\begin{aligned} U_n + I_n &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left[C_n(t) - \frac{1}{2} g_n(t) \right] dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2} \right) \right]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

$$C/ \quad f(t) = \frac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{\sin \frac{t}{2}} \text{ si } t \in]0, \pi] \text{ et } f(0) = 2$$

$$1) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{t}{2\pi}}{\frac{\sin \frac{t}{2}}{t}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue sur } [0, \pi]$$

f est continue sur un intervalle fermé borné $[0, \pi]$ donc elle est bornée donc $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [0, \pi] \quad f(t) \leq M$

$$U(t) = t - \frac{t^2}{2\pi} \quad \forall t \in [0, \pi], \quad U'(t) = 1 - \frac{t}{\pi} \geq 0 \Rightarrow U \text{ est croissante sur }]0, \pi]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} U(t) = 0 \Rightarrow \forall t \in]0, \pi] \quad U(t) > 0$$

$$\text{Or } \forall t \in]0, \pi] \quad \text{on a : } \frac{1}{2} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \sin \frac{t}{2} > 0 \Rightarrow f(t) > 0 \quad \forall t \in]0, \pi]$$

$$\text{Or } f(0) = 2 \Rightarrow \forall t \in]0, \pi] \quad f(t) > 0 \Rightarrow \exists M > 0 ; \forall t \in [0, \pi] \quad 0 < f(t) < M$$

$$2) \text{ a) } f \text{ est dérivable sur }]0, \pi] ; \forall t \in]0, \pi] \quad f'(t) = \frac{\left(1 - \frac{t}{\pi} \right) \sin \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \left(1 - \frac{t}{2\pi} \right) \cos \frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}}$$

$$f'(t) = \frac{\sin \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} - \frac{\frac{t}{\pi} \sin \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4\pi} \cos \frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}}$$

b) À l'aide d'étude de signe des fonctions on démontre que :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] ; 0 \leq t - 2 \sin \frac{t}{2} \leq \frac{t^3}{24}$$